ФУНДАМЕНТАЛЬНІ НАУКИ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ
FUNDAMENTAL SCIENCES

УДК 517.9

Н. О. Декун, асп.

Н. А. Декун, асп.

N. Dekun, Post-Graduate

УСЕРЕДНЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ З ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ ТИПУ НЕРІВНОСТЕЙ

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ

HOMOGENIZATION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH STATE CONSTRAINTS OF INEQUALITY TYPE

Досліджується проблема усереднення задачі оптимального керування з фазовими обмеженнями типу нерівностей для квазілінійного рівняння еліптичного типу. Припустивши, що всі компоненти математичного опису даної задачі залежать від деякого малого параметра, вивчається її асимптотична поведінка, а також ідентифікується математична модель граничної (усередненої) задачі оптимального керування та її варіаційні властивості.

Изучается проблема усреднения задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями типа неравенств для квазилинейного уравнения эллиптического типа. Предположив, что все компоненты математического описания данной задачи зависят от некоторого малого параметра, изучается ее асимптотическое поведение, а также идентифицируется математическая модель предельной (усредненной) задачи оптимального управления и ее вариационные свойства.

Problem of homogenization of optimal control problem with the state constraints of inequality type for kvazilinear equation of elliptic type is investigated. Assuming that all the components of mathematical description of the given problem depend on a small parameter, its asymptotic behavior is studied and mathematical model of limit (homogenized) optimal control problem and its variation properties are investigated.

Вступ

В роботі досліджується асимптотична поведінка задач оптимального керування (ЗОК) з фазовими обмеженнями типу нерівностей для систем, що описуються рівняннями в частинних похідних. Особливістю розглянутих задач є те, що їхні математичні моделі суттєво залежать від деякого параметра ε. При досить малих значеннях ε чисельні методи, як правило, є неспроможними в аналізі таких задач. Таким чином, природно розглядати задачу в усередненні, тобто вивчати її асимптотичну поведінку, коли $\varepsilon \to \theta$. Відомо, що якою б не була процедура граничного аналізу, вона повинна зберігати головну варіаційну властивість: збіжність оптимальних розв'язків і найменших значень функціоналів якості вихідної задачі (коли $\varepsilon \to \theta$) до аналогічних характеристик граничної (усередненої). У зв'язку з цим ЗОК для різних значень ε представляється у вигляді послідовності відповідних задач умовної мінімізації (ЗУМ), а потім визначається підходяща для цього сімейства усереднена задача як, так звана, варіаційна границя даної послідовності [1].

Введение

В работе исследуется асимптотическое поведение задач оптимального управления (ЗОУ) с фазовыми ограничениями типа неравенств для систем, описываемых уравнениями в частных производных. Особенностью рассматриваемых задач является то, что их математические модели по существу зависят от некоторого параметра ε. При достаточно малых значениях ε численные методы, как правило, несостоятельны в анализе таких задач. Таким образом, естественно рассматривать задачу в усреднении, то есть изучать ее асимптотическое поведение при $\varepsilon \to \theta$. Известно, что какой бы ни была процедура предельного анализа, она должна сохранять главное вариационное свойство: сходимость оптимальных решений и наименьших значений функционалов качества исходной задачи (при $\varepsilon \to \theta$) к аналогичным характеристикам предельной (усредненной). В связи с этим ЗОУ для различных значений ε представляется в виде последовательности соответствующих задач условной минимизации (ЗУМ), а затем определяется подходящая для этого семейства усредненная задача как, так называемый, вариационный предел данной последовательности [1].

Introduction

This paper studies asymptotic behavior of optimal control problems (OCP) with inequality state constraints for the systems described by the equations with partial derivatives. Characteristic feature of considered problems is that their mathematical models depend on some parameter ε. At rather small values of ε the numerical methods, as a rule, are insolvent at analysis of such problems. Thus it is natural to consider this problem in averaging, that is to study its asymptotic behavior as $\varepsilon \to \theta$. It is known, that whatever the procedure for the limit analysis is, but it has to preserve main variational property convergence of optimal solutions and: minimum value of functionals of the original problem quality (when $\varepsilon \to \theta$.) to similar characteristics of limit (homogenized) problem. In this connection the optimal control problem (OCP) for various values of ε is represented in the form of the sequence of corresponding constrained minimization problems (CMP) and further an appropriate for this family homogenized problem is determined as so-called variational limit of the given sequence [1].

1. Постановка задачі

Нехай Ω — відкрита обмежена зв'язна множина в R^n з достатньо гладкою границею ∂Ω, S — багатостатність в Ω розмірності $n-1$, E — частково впорядкована за спаданням множина з мінімальним елементом θ. В Ω задане сімейство непустих відкритих підмножин $\{\omega_\varepsilon \subset\subset \Omega\}_{\varepsilon\in E}$, що не перетинаються з S. Множини ω_ε в цій задачі розглядаються як носії допустимих керувань. В загальному випадку ці множини можуть мати перфоровану структуру. Для заданих $\alpha > 0$, $z_0 \in L^2(S)$ і фіксованого $\varepsilon \in E$ розглянемо ЗОК

$$A_\varepsilon y + T_\varepsilon(y) = \chi_{\omega_\varepsilon} u; \tag{1}$$

$$y \in H_0^1(\Omega), \quad u \in U_\varepsilon = \left\{ \nu \in L^2(\Omega) : \chi_{\omega_\varepsilon}\xi_1 \le \nu \le \chi_{\omega_\varepsilon}\xi_2 \right\}; \tag{2}$$

$$\left\| y\big|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha; \tag{3}$$

$$I_\varepsilon = \int_{\omega_\varepsilon} u^2(x)\,dx \to \inf, \tag{4}$$

де $A_\varepsilon y = -\operatorname{div}(A_\varepsilon(x)\nabla y)$, $A_\varepsilon : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, $T_\varepsilon : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ — нелінійний оператор (нелинейный оператор; nonlinear operator), $\chi_{\omega_\varepsilon}$ — характеристична функція множини ω_ε (характеристическая функция множества ω_ε; characteristic function of the set ω_ε), $y\big|_S$ — звуження функції $y \in H_0^1(\Omega)$ на багатостатність S (сужение функции $y \in H_0^1(\Omega)$ на многообразие S; the restriction of the function $y \in H_0^1(\Omega)$ to the manifold S).

Особливістю задачі є просторова локалізованість множини ω_ε. Передбачається, що множини ω_ε мають перфоровану структуру. Як випливає з (3), нас цікавить поведінка функцій керування в околі багатостатності S. У цій статті пропонується нетривіальне узагальнення задачі, розглянутої в [2]. Відмінність полягає в тому, що носії функцій керування в розглянутій тут задачі передбачаються залежними від параметра ε.

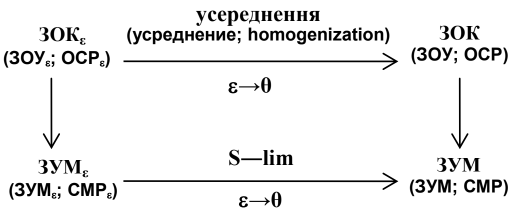

Рис. 1. Діаграма усереднення
Рис. 1. Диаграмма усреднения
Fig. 1. Averaging diagram

2. Метод усереднення

Будемо виходити зі схеми усереднення, показаної на рис. 1. Суть схеми в тому, щоб:

1) записати вихідну ЗОК (1)-(4) у вигляді задачі умовної мінімізації

$$\left\{\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y)\right\rangle\right\}_{\varepsilon\in E}; \quad (5)$$

$$\Xi_\varepsilon=\left\{(u,y)\in L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\;\middle|\;\begin{array}{l}A_\varepsilon y+T_\varepsilon(y)=\chi_{\omega_\varepsilon}u,\\ \chi_{\omega_\varepsilon}\xi_1\le\nu\le\chi_{\omega_\varepsilon}\xi_2,\\ \left\|y|_S-z_0\right\|_{L^2(S)}\le\alpha;\end{array}\right\} \quad (6)$$

2) для сукупності задач (5) визначити граничну (для $\varepsilon\to\theta$) ЗУМ;

3) за граничною ЗУМ відновити граничну ЗОК.

3. Апроксимація

Через наявність фазових обмежень (3), задача (1)—(4) замінюється такою задачею:

$$A_\varepsilon y+T_\varepsilon(y)=\chi_{\omega_\varepsilon}u \quad \text{п.в. в } \Omega; \quad (7)$$

$$y\in H_0^1(\Omega),\quad u\in U_\varepsilon=\left\{\nu\in L^2(\Omega):\chi_{\omega_\varepsilon}\xi_1\le\nu\le\chi_{\omega_\varepsilon}\xi_2\right\}; \quad (8)$$

$$I_\varepsilon^\mu(u,y)=\int_{\omega_\varepsilon}u^2dx+\frac{1}{\mu}\left[\nu\left(\alpha-\left\|y|_S-z_0\right\|_{L^2(S)}\right)\right]^2\to\inf, \quad (9)$$

де $\nu: R\to R_+$ — опукла монотонно спадна функція, строго монотонна на R_- і така, що $\nu(t)=0$ $\forall t\ge 0$ (выпуклая монотонно убывающая функция, строго монотонная на R_- и такая, что $\nu(t)=0$ $\forall t\ge 0$; convex monotonously descending function, which is strictly monotonous on R_- and such that $\nu(t)=0$ $\forall t\ge 0$). Запишемо штрафну ЗОК (7)—(9) у вигляді ЗУМ

$$\left\{\left\langle \inf_{(u,y)\in\overline{\Xi}_\varepsilon} I_\varepsilon^\mu(u,y)\right\rangle\right\}_{\varepsilon\in e}, \quad (10)$$

де $\overline{\Xi}_\varepsilon$ — множина допустимих пар (множество допустимых пар; a set of admissible pairs)

$$\Xi_\varepsilon=\left\{(u,y)\in L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\;\middle|\;\begin{array}{l}A_\varepsilon y+T_\varepsilon(y)=\chi_{\omega_\varepsilon}u,\\ \chi_{\omega_\varepsilon}\xi_1\le u\le\chi_{\omega_\varepsilon}\xi_2.\end{array}\right\} \quad (11)$$

Рис. 2. Розширена діаграма усереднення
Рис. 2. Расширенная диаграмма усреднения
Fig. 2. Extended averaging diagram

Оскільки задача (7)—(9) є двопараметричною, то граничний перехід у відповідній ЗУМ (10) повинен здійснюватися по кожному з параметрів μ і ε окремо. Подані нижче результати доводять комутативність даної операції граничного переходу. Таким чином, діаграма усереднення набуває вигляду, показаного на рис. 2. Тут для штрафних задач використовуються такі позначення: $\overline{\text{ЗОК}}, \overline{\text{ЗУМ}}$.

4. S-збіжність (за параметром ε) ЗУМ (10)

Ведемо припущення:

а) сімейство $\{A_\varepsilon\}$ рівномірно коерцитивне і рівномірно обмежене;

b) $\|T_\varepsilon(y_1)-T_\varepsilon(y_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \lambda\|y_1-y_2\|_{L^2(\Omega)}\left(1+\|y_1\|_{L^2(\Omega)}+\|y_2\|_{L^2(\Omega)}\right)\ \ \forall y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$;

c) оператори $\{T_\varepsilon\}$ рівномірно монотонні;

d) оператори $\{T_\varepsilon\}$ мають властивість (M): $\forall\ \left\{H_0^1(\Omega) \ni y_k\right\}_k \xrightarrow{W_{H_0^1(\Omega)}} y$, такої що $T_\varepsilon(y_k) \xrightarrow{\overset{*}{W}_{H^{-1}(\Omega)}} \eta$ і $\limsup\limits_{k\to 0} \langle T_\varepsilon(y_k), y_k\rangle \le \langle \eta, y\rangle$, маємо $\eta = T_\varepsilon(y_k)$;

e) $\Xi_\varepsilon \ne \varnothing$;

f) існує оператор $T_0 : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, для якого виконуються умови b)—c), і $T_\varepsilon(y_\varepsilon) \xrightarrow{s_{H^{-1}(\Omega)}} T_0(y)\ \ \forall\left\{H_0^1(\Omega) \ni y_\varepsilon\right\}_\varepsilon \xrightarrow{W_{H_0^1(\Omega)}} y \in H_0^1(\Omega)$;

g) існує непуста відкрита множина $\omega_0 \subset\subset \Omega$, така що $\omega_\varepsilon \subseteq \omega_0\ \ \forall \varepsilon \in E$, і при цьому $\omega_0 = \operatorname{int}(\sup p(\chi_0))$, де $\chi_0 = \overset{*}{w}_{L^\infty(\Omega)} - \lim\limits_{\varepsilon\to\theta} \chi_{\omega_\varepsilon}$.

h) $m_0^{-1} \in L^\infty(\omega_0)$, де $m_0 = \chi_0\big|_{\omega_0}$ — звуження функції χ_0 на ω_0.

Використовуючи концепції збіжності множин в сенсі Куратовського [3], Г-збіжності функціоналів [3], *G*-збіжності операторів [4] і *S*-збіжності ЗУМ [1], легко встановити такий результат.

***Теорема* 1.** *Нехай виконуються припущення a)—h). Тоді при кожному значенні* $\mu > 0$ *послідовність* (10) *абсолютно S-збігається до ЗУМ*

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_0} I_0^\mu(u,y)\right\rangle; \tag{12}$$

$$\Xi_0 = \left\{ (u,y) \in L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \ \middle|\ \begin{array}{l} A_0 y + T_0(y) = \chi_{\omega_0} u; \\ \chi_0\xi_1 \le u \le \chi_0\xi_2. \end{array}\right\} \tag{13}$$

$$I_0^\mu(u,y) = \int_{\omega_0} m_0^{-1}u^2(x)dx + \mu^{-1}\left\lfloor \nu\left(\alpha - \left\|y|_S - z_0\right\|_{L^2(S)}\right)\right\rfloor^2 \to \inf. \tag{14}$$

$$A_0 = G - \lim_{\varepsilon\to\theta} A_\varepsilon,\quad T_0 = s_{H^{-1}(\Omega)} - \lim_{\varepsilon\to\theta} T_\varepsilon,\quad \chi_0 = \overset{*}{w}_{L^\infty(\Omega)} - \lim_{\varepsilon\to\theta}\chi_{\omega_\varepsilon},\quad m_0 = \chi_0\big|_{\omega_0}. \tag{15}$$

5. Збіжність за параметром μ штрафних задач (10) і (12)

Оскільки для фіксованого $\varepsilon \in E$ послідовності $\left\{I_\varepsilon^\mu(u,y)\right\}_{\mu>0}$, $\left\{I_0^\mu(u,y)\right\}_{\mu>0}$ монотонно зростають, коли $\mu \to 0$, то, переходячи до границі в (10) і (12), одержимо [5]

$$\left\{\left\langle \inf_{(u,y)\in\overline{\Xi}_\varepsilon} I_\varepsilon^\mu(u,y)\right\rangle\right\}_{\varepsilon\in E} \xrightarrow[\mu\to 0]{S-\lim} \left\{\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_\varepsilon} I_\varepsilon(u,y)\right\rangle\right\}_{\varepsilon\in E}; \tag{16}$$

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\overline{\Xi}_0} I_0^\mu(u,y)\right\rangle \xrightarrow[\mu\to 0]{S-\lim} \left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_0} I_0(u,y)\right\rangle, \tag{17}$$

де

$$\left\langle \inf_{(u,y)\in\Xi_0} I_0(u,y)\right\rangle, \tag{18}$$

$$\Xi_0 = \left\{ (u, y) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \left| \begin{array}{l} A_0 y + T_0(y) = \chi_{\omega_0} u, \\ \chi_0 \xi_1 \le u \le \chi_0 \xi_2, \\ \left\| y|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha; \end{array} \right. \right\} \tag{19}$$

$$I_0^{\mu}(u, y) = \int\limits_{\omega_0} m_0^{-1} u^2(x) dx \to \inf. \tag{20}$$

6. *S*-збіжність (за параметром ε) вихідної ЗУМ (5) і результат усереднення

Введемо такі припущення:

i) $\tau - Lm\Xi_\varepsilon \ne \varnothing$, $\tau = \omega_{L^2(\Omega)} \times \omega_{H_0^1(\Omega)}$.

j) існує τ-збіжна послідовність допустимих пар $\left\{ (u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon \right\}_{\varepsilon \in E}$, границя якої належить до множини ri Λ — відносної внутрішності множини

$$\Lambda = \left\{ (u, y) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \left| \left\| y|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha \right. \right\}; \tag{21}$$

k) $cl_\tau(\Xi_0 \cap ri\,\Lambda) = \Xi_0 \cap \Lambda$, де $cl_\tau(\cdot)$ — τ-замикання множини (замыкание множества, closure of the set).

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення* a)—k). *Тоді при кожному значенні* $\mu > 0$ *послідовність* (5) *абсолютно S-збігається до ЗУМ (18).*

Структура множини Ξ_0 дозволяє відновити по граничній ЗУМ (18) граничну (усереднену) ЗОК:

$$A_0 y + T_0(y) = \chi_{\omega_0} u; \tag{22}$$

$$y \in H_0^1(\Omega), \quad u \in U_0 = \left\{ \nu \in L^2(\Omega) : \chi_0 \xi_1 \le \nu \le \chi_0 \xi_2 \right\}; \tag{23}$$

$$\left\| y|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha; \tag{24}$$

$$I_0(u, y) = \int\limits_{\omega_0} m_0^{-1} u^2(x) dx \to \inf. \tag{25}$$

7. Приклад

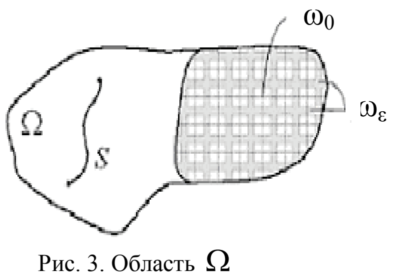

Рис. 3. Область Ω
Рис. 3. Область Ω
Fig. 3. The domain Ω

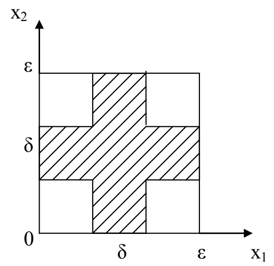

Рис. 4. Комірка періодичності
Рисю 4. Ячейка периодичности
Fig. 4. The periodicity cell

Нехай Ω — підобласть в R^2 з достатньо гладкою границею, ω_ε — деяка непуста підмножина в Ω (рис. 3). Множина ω_ε інтерпретується як зона керування і має ´ратчату періодичну структуру з періодом ε, яка задається в такий спосіб: $\omega_\varepsilon = \omega_0 \cap Q_\varepsilon$, $Q_\varepsilon = \varepsilon Q$, де Q — одноперіодична область в R^2. На рис. 4 показана комірка періодичності.

На області Ω розглянемо таку ЗОК:

$$-div\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla y \right) = \chi_{\omega_\varepsilon} u; \tag{26}$$

$$y \in H_0^1(\Omega), \quad u \in U_\varepsilon = \left\{ \nu \in L^2(\Omega) : \chi_{\omega_\varepsilon} \xi_1 \le \nu \le \chi_{\omega_\varepsilon} \xi_2 \right\}; \tag{27}$$

$$\left\| y|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha; \tag{28}$$

$$I_\varepsilon(u, y) = \int\limits_{\omega_\varepsilon} u^2(x) dx \to \inf. \tag{29}$$

Передбачаються такі коефіцієнти еліптичного оператора:

$$a(x/\varepsilon) = \{\beta(\beta > 0), \quad x \in \Omega \cap Q_\varepsilon; \quad \gamma(\gamma > 0), \quad x \in \Omega \setminus Q_\varepsilon\}. \tag{30}$$

Застосовуючи описану вище процедуру усереднення, можна показати, що гранична ЗОК в цьому випадку існує і може бути представлена у вигляді такої ЗОК:

$$a_0 \Delta y = \chi_{\omega_0} u; \tag{31}$$

$$y \in H_0^1(\Omega), \quad u \in U_0 = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \chi_0 \xi_1 \le v \le \chi_0 \xi_2 \right\}; \tag{32}$$

$$\left\| y\big|_S - z_0 \right\|_{L^2(S)} \le \alpha; \tag{33}$$

$$I_0(u, y) = \int_{\omega_0} m_0^{-1} u^2(x) dx \to \inf; \tag{34}$$

$$\alpha_0 = \left\lfloor \beta^{-1}\left(2\delta - \delta^2\right) + (1-\delta)^2 \right\rfloor, \ m_0 = 2\delta - \delta^2, \ \chi_0(x) = \left\{2\delta - \delta^2, \ x \in \omega_0; \ 0, \ x \in \Omega \setminus \omega_0 \right\}. \tag{35}$$

1. Постановка задачи

Пусть Ω — открытое ограниченное связное множество в R^n с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, S — многообразие в Ω размерности n – 1, E — частично упорядоченное по убыванию множество с минимальным элементом θ. В Ω задано семейство непустых открытых подмножеств $\{\omega_\varepsilon \subset\subset \Omega\}_{\varepsilon \in E}$, не пересекающихся с S. Множества ω_ε в этой задаче рассматриваются как носители допустимых управлений. В общем случае эти множества могут иметь перфорированную структуру. Для заданных $\alpha > 0$, $z_0 \in L^2(S)$ и фиксированного $\varepsilon \in E$ рассмотрим ЗОУ: (1)—(4).

Особенностью задачи является пространственная локализованность множества ω_ε. Предполагается, что множества ω_ε имеют перфорированную структуру. Как следует из (3), нас интересует поведение функций управления в окрестности многообразия S. В этой статье предлагается нетривиальное обобщение задачи, рассмотренной в [2]. Отличие заключается в том, что носители функций управления в рассмотренной здесь задаче предполагаются зависящими от параметра ε.

2. Метод усреднения

Будем исходить из схемы усреднения, показаной на рис. 1. Суть схемы в том, чтобы:

1) записать исходную ЗОУ (1)—(4) в виде задачи условной минимизации (5)—(6);
2) для совокупности задач (5) определить предельную (при $\varepsilon \to \theta$) ЗУМ;
3) по предельной ЗУМ восстановить предельную ЗОУ.

3. Аппроксимация

Ввиду наличия фазовых ограничений (3), задача (1)—(4) заменяется задачей (7)—(9). Запишем штрафную ЗОУ (7)—(9) в виде ЗУМ: (10), (11).

Поскольку задача (7)—(9) является двухпараметрической, то предельный переход в соответствующей ЗУМ (10) должен осуществляться по каждому из параметров μ и ε отдельно. Приведенные ниже результаты доказывают коммутативность данной операции предельного перехода. Таким образом, диаграмма усреднения принимает вид (рис. 2).

Здесь для штрафных задач используются следующие обозначения: $\overline{\text{ЗОУ}}, \overline{\text{ЗУМ}}$.

4. *S*-сходимость (по параметру ε) ЗУМ (10)

Введем предположения:

a) семейство $\{A_\varepsilon\}$ равномерно коэрцитивно и равномерно ограничено;

b) $\left\|T_\varepsilon(y_1) - T_\varepsilon(y_2)\right\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \lambda \left\|y_1 - y_2\right\|_{L^2(\Omega)} \left(1 + \left\|y_1\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|y_2\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \ \forall y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$;

c) операторы $\{T_\varepsilon\}$ равномерно монотонны;

d) операторы $\{T_\varepsilon\}$ обладают свойством (M): $\forall \left\{H_0^1(\Omega) \ni y_k\right\}_k \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} y$, такой что $T_\varepsilon(y_k) \xrightarrow{w^*_{H^{-1}(\Omega)}} \eta$ и $\limsup\limits_{k \to 0} \left\langle T_\varepsilon(y_k), y_k \right\rangle \le \left\langle \eta, y \right\rangle$, имеем $\eta = T_\varepsilon(y_k)$;

e) $\Xi_\varepsilon \neq \varnothing$;

f) существует оператор $T_0 : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, для которого выполняются условия b)—c), и

$T_\varepsilon(y_\varepsilon) \xrightarrow{s_{H^{-1}(\Omega)}} T_0(y) \quad \forall \left\{ H_0^1(\Omega) \ni y_\varepsilon \right\}_\varepsilon \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} y \in H_0^1(\Omega)$;

g) существует непустое открытое множество $\omega_0 \subset\subset \Omega$, такое что $\omega_\varepsilon \subseteq \omega_0 \ \forall \varepsilon \in E$, и при этом $\omega_0 = \operatorname{int}\left(\sup p(\chi_0)\right)$, где $\chi_0 = w^*_{L^\infty(\Omega)} - \lim\limits_{\varepsilon \to \theta} \chi_{\omega_\varepsilon}$;

h) $m_0^{-1} \in L^\infty(\omega_0)$, где $m_0 = \chi_0\big|_{\omega_0}$ — сужение функции χ_0 на ω_0.

Используя концепции сходимости множеств по Куратовскому [3], Γ-сходимости функционалов [3], *G*-сходимости операторов [4] и *S*-сходимости ЗУМ [1], легко установить следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполняются предположения* a)—h). *Тогда при каждом значении* $\mu > 0$ *последовательность* (10) *абсолютно S-сходится к ЗУМ:* (12)—(15).

5. Сходимость по параметру μ штрафных задач (10) и (12)

Так как при фиксированном $\varepsilon \in E$ последовательности $\left\{ I_\varepsilon^\mu(u,y) \right\}_{\mu>0}$, $\left\{ I_0^\mu(u,y) \right\}_{\mu>0}$ монотонно возрастают при $\mu \to 0$, то переходя к пределу в (10) и (12), получим [5]: (16)—(17), где (18)—(20).

6. *S*-сходимость (по параметру ε) исходной ЗУМ (5) и результат усреднения

Введем следующие предположения:

i) $\tau - \mathrm{Lm}\,\Xi_\varepsilon \neq \varnothing$, $\tau = \omega_{L^2(\Omega)} \times \omega_{H_0^1(\Omega)}$.

j) существует τ-сходящаяся последовательность допустимых пар $\left\{ (u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon \right\}_{\varepsilon \in E}$, предел которой принадлежит множеству ri Λ — относительной внутренности множества (21);

k) $cl_\tau\left(\Xi_0 \cap ri\ \Lambda\right) = \Xi_0 \cap \Lambda$, где $cl_\tau(\bullet)$ — τ-замыкание множества.

Теорема 2. *Пусть выполняются предположения* a)—k). *Тогда при каждом значении* $\mu > 0$ *последовательность* (5) *абсолютно S-сходится к ЗУМ* (18).

Структура множества Ξ_0 позволяет восстановить по предельной ЗУМ (18) предельную (усредненную) ЗОУ: (22)—(25).

7. Пример

Пусть Ω — подобласть в R^2 с достаточно гладкой границей, ω_ε — некоторое непустое подмножество в Ω (рис. 3). Множество ω_ε интерпретируется как зона управления и имеет решетчатую периодическую структуру с периодом ε, которая задается следующим образом: $\omega_\varepsilon = \omega_0 \cap Q_\varepsilon$, $Q_\varepsilon = \varepsilon Q$, где *Q* — одноепериодическая область в R^2. На рис. 4 представлена ячейка периодичности.

На области Ω рассмотрим следующую ЗОУ: (26)—(29).

Коэффициенты эллиптического оператора предполагаются следующими: (30).

Применяя описанную процедуру усреднения, можно показать, что предельная ЗОУ в этом случае существует и представима в виде (31)—(35).

1. Problem statement

Let Ω be an open bounded connected set in R^n with the smooth enough boundary $\partial\Omega$, *S* be manifold in Ω dimensionality *n* – 1, *E* be partially arranged in descending order set with minimal element θ. The family of the nonempty open subsets $\left\{ \omega_\varepsilon \subset\subset \Omega \right\}_{\varepsilon \in E}$ not interesting *S* is given in Ω. The sets ω_ε can be regarded in this problem as the supports of the admissible controls. In general case these sets may have perforated structure. For the given $\alpha > 0$, $z_0 \in L^2(S)$ and fixed $\varepsilon \in E$ let's consider the following OCP: (1)—(4).

The specific feature of this problem is spatial localization of the set ω_ε. It is supposed that these sets have the perforated structure. As it follows from (3) we are interested in the behavior of the control functions in the neighborhood of the manifold *S*. In this paper nontrivial generalization of the problem considered in the recently published article [2] is suggested. The main difference is that the supports of control functions in the problem studied here are assumed to be dependent on the parameter ε.

2. Averaging method

Let us start with the following homogenization scheme (Fig. 1).

The main point of this scheme is:

1) write the initial OCP (1)—(4) in the form of constrained minimization problem (CMP): (5)—(6);

2) for the problem family (5) define the limit CMP (at $\varepsilon \to \theta$);

3) recover the limit OCP by limit CMP.

3. Approximation

Due to the state constraints (3) the problem (1)—(4) is replaced with the following problem: (7)—(9),

Let us write down the penalty OCP (7—9) as CMP: (10)—(11).

Since the problem (7)—(9) is two-parametric, then the limit transition to corresponding CMP (10) should be carried out by each of the parameters μ and ε separately. The results presented below prove the commutativeness of the given limit passing operation. Thus, the extended homogenization diagram will take the form: (Fig. 2).

Here for penalty problems the following notations: $\overline{\text{OCP}}, \overline{\text{CMP}}$. are used

4. *S*-convergence (by parameter ε) of CMP (10)

Let us introduce the following assumptions:

a) the operator family $\{A_\varepsilon\}$ is regularly coercive and is regularly limited;

b) $\|T_\varepsilon(\nu_1) - T_\varepsilon(\nu_2)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \lambda \|y_1 - y_2\|_{L^2(\Omega)} \left(1 + \|y_1\|_{L^2(\Omega)} + \|y_2\|_{L^2(\Omega)}\right) \ \forall y_1, y_2 \in L^2(\Omega)$

c) the operators $\{T_\varepsilon\}$ are regularly monotonous;

d) the operators $\{T_\varepsilon\}$ possess the property of (M): $\forall \ \left\{H_0^1(\Omega) \ni y_k\right\}_k \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} y$, such that $T_\varepsilon(y_k) \xrightarrow{w^*_{H^{-1}(\Omega)}} \eta$ and $\limsup\limits_{k\to 0} \left\langle T_\varepsilon(y_k), y_k \right\rangle \le \langle \eta, y \rangle$, we have $\eta = T_\varepsilon(y_k)$;

e) $\Xi_\varepsilon \ne \varnothing$;

f) there is an operator $T_0 : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, for which the conditions b)—c) hold true and $T_\varepsilon(y_\varepsilon) \xrightarrow{s_{H^{-1}(\Omega)}} T_0(y) \quad \forall \left\{H_0^1(\Omega) \ni y_\varepsilon\right\}_\varepsilon \xrightarrow{w_{H_0^1(\Omega)}} y \in H_0^1(\Omega)$;

g) there is nonempty open set $\omega_0 \supset\supset \Omega$ so that $\omega_\varepsilon \subseteq \omega_0 \quad \forall \varepsilon \in E$ and $\omega_0 = \operatorname{int}\left(\sup p(\chi_0)\right)$, where $\chi_0 = w^*_{L^\infty(\Omega)} - \lim\limits_{\varepsilon \to \theta} \chi_{\omega_\varepsilon}$.

h) $m_0^{-1} \in L^\infty(\omega_0)$, where $m_0 = \chi_0\big|_{\omega_0}$ is restriction of the function χ_0 to the ω_0. Using the concepts of the set convergence in the sense of Kuratowski [3], Γ-convergence of functionals [3], *G*-convergence of operators [4] and *S*-convergence of the constrained minimization problems [1], it is easy to reach the following result.

***Theorem* 1.** *Assume that the assumptions a-h are valid. Then for every fixed value of* $\mu > 0$ *the sequence* (10) *is absolutely S-convergent and it takes the form* (12)—(15).

5. Convergence by the parameter (M) of penalty problems (10) and (12)

Since for every fixed value of $\varepsilon \in E$ functional sequences $\left\{I_\varepsilon^\mu(u,y)\right\}_{\mu>0}$, $\left\{I_0^\mu(u,y)\right\}_{\mu>0}$ are monotonously increasing at $\mu \to 0$, it follows that passing to the limit in (11) and (14) we obtain [5]: (16)—(17), where (18)—(20).

6. *S*-convergence (by parameter ε) of the original CMP (5) and the result of homogenization

Let us introduce the following assumptions:

i) $\tau - \mathrm{Lm}\Xi_\varepsilon \ne \varnothing$, $\tau = \omega_{L^2(\Omega)} \times \omega_{H_0^1(\Omega)}$;

j) there is τ-convergent sequence of the admissible pairs $\left\{(u_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Xi_\varepsilon\right\}_{\varepsilon\in E}$ the limit of which belongs to the set ri Λ — relative interior set (20);

k) $cl_\tau\left(\Xi_0 \cap ri\ \Lambda\right) = \Xi_0 \cap \Lambda$, where $cl_\tau(\bullet)$ is a τ-closure of the set.

***Theorem* 2**. *Let the assumptions a-k be performed. Then for every fixed value* $\mu > 0$ *the sequence* (5) *absolutely S-converges to CMP* (18).

The structure of set Ξ_0 allows to reconstruct the limit (homogenized) OCP by the limit CMP (18): (22)—(25).

7. The example

Let Ω be a subdomain of R^2 with rather smooth boundary. Let ω_ε be some nonempty subset of Ω (Fig. 3). The set ω_ε is interpreted as the control zone and it has the periodic lattice structure with the period ε, which is set in the following way: $\omega_\varepsilon = \omega_0 \cap Q_\varepsilon$, $Q_\varepsilon = \varepsilon Q$, where Q — is one-period domain in R^2. In Figure 4 the cell of periodicity is presented.

On the domain Ω let's consider the following OCP: (26)—(29).

The coefficients of the elliptic operator are supposed to be the following: (30).

Applying homogenization procedure described above, it is possible to show, that in this case the limit OCP exists and is presented in the form of: (31)—(35).

Висновки

Таким чином, отримано достатні умови існування усередненої до (1)—(4) задачі та ідентифіковано її структуру.

Выводы

Таким образом, получены достаточные условия существования усредненной к (1)—(4) задачи и идентифицирована ее структура.

CONCLUSION

Thus, the sufficient conditions of the existence of the averaged to (1)—(4) problem have been obtained and the structure of the problem has been identified.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Когут П. И. S-сходимость задач условной минимизации и ее вариационные свойства // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 4. — С. 64—79.
2. Conca C., Osses A., Sain Jean Paulin J. A semilinear control problem involving homogrnization // Electron. J. Diff. Eqns., Conf. — 2001. — № 6. — P. 109—122.
3. Dal Maso G. An introduction to Γ-Convergence. — Boston: Birkhäuser, 1993.
4. Pankov A. G-convergence and Homogenization of Nonlinear Partial Differential Equations // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht:1997.
5. Attouch. Variational convergence functionals and operators. — London: Pitman, 1984.

Рекомендована кафедрою прикладної математики

Надійшла до редакції 11.05.06
Рекомендована до друку 20.05.06

Декун Наталія Олександрівна — аспірантка.

Кафедра прикладної математики Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту імені академіка Лазаряна

Декун Наталья Александровна — аспирантка.

Кафедра прикладной математики Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта имени академика Лазаряна

Nataliya Dekun — Post-Graduate Student.

Chair of Applied Mathematics of Dniepropetrovsk Lazarian National University of Railway Transport